

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合的概念

基础必刷

1. B 【解析】对于 A:“非常接近”不具有确定性,故选项 A 错误;对于 B:对于任何一个学生可以判断其是否在高一学生这个集合中,故选项 B 正确;对于 C:“比较好”不具有确定性,故选项 C 错误;对于 D:“高手”不具有确定性,故选项 D 错误. 故选 B.

方法精炼

判断一组对象能否构成集合的关键是该组对象是否唯一确定,即是否能找到一个明确的标准,确定任意一个对象是不是给定集合中的元素.

2. AC 【解析】对于 A,因为 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数集,所以可判断 A 正确;

对于 B,若 $a = \frac{1}{2}$,则满足 $-a \notin \mathbf{N}^*$,但 $a \notin \mathbf{N}^*$,所以 B 错误;

对于 C,因为 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数集,则 $a+b$ 的最小值是 2,所以 C 正确;

对于 D,因为 $x^2+4=4x$ 的解为 $x_1=x_2=2$,则该集合中含有 1 个元素,所以 D 错误. 故选 AC.

3. B 【解析】由于 2 是有理数, π 是无理数,故 A, D 错误;由于 0 是自然数,故 B 正确;由于 $\frac{1}{2}$ 不是整数,故 C 错误. 故选 B.

4. C 【解析】因为集合 $A = \{1, 2\}$,集合 $B = \{3, 4\}$,且 $C = \{x | x = a-b, a \in A, b \in B\}$,所以当 $a=1, b=3$ 时, $x=-2$;当 $a=1, b=4$ 时, $x=-3$;当 $a=2, b=3$ 时, $x=-1$;当 $a=2, b=4$ 时, $x=-2$. 由集合中元素的互异性得 $C = \{-2, -3, -1\}$,则集合 C 中含有的元素个数为 3. 故选 C.

5. ACD 【解析】0 是元素不是集合, $\{0\}$ 表示只含有一个元素 0 的集合,故 A 错误;

集合 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 2, 1\}$ 的元素完全相同,所以是两个相同的集合,故 B 正确;

方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的所有实数解组成的集合可表示为 $\{1, 2\}$,集合中的元素是互不相同的,故 C 错误;

集合 $\{x | 4 < x < 5\}$ 表示大于 4 且小于 5 的全体实数,有无数个且无法一一列举出来,不可以用列举法表示,故 D 错误.

故选 ACD.

6. $\{a | 0 < a < 2\}$ 【解析】 $\because A = \{0, 1\}, B = \{a^2, 2a\}$,则 $a^2 \neq 2a$, $\therefore$ 由 $x_1 \in A, x_2 \in B$ 可得 x_1+x_2 的值为 $a^2, 2a, a^2+1, 2a+1$.
 $\because$ 集合 $A * B$ 中的最大元素是 $2a+1$,且 $a^2 < a^2+1, 2a < 2a+1, a^2 \neq 2a$, $\therefore a^2+1 < 2a+1, \therefore 0 < a < 2$.

因此 a 的取值范围是 $\{a | 0 < a < 2\}$.

7. $\{0, -1, -4\}$ 【解析】集合 $A = \{x | 4ax^2 + 4(a+2)x - 1 = 0\}$ 表示关于 x 的方程 $4ax^2 + 4(a+2)x - 1 = 0$ 的解集.

因为集合 A 中只有一个元素,所以

当 $4a=0$,即 $a=0$ 时,解得 $x = \frac{1}{8}$,此时 $A = \{\frac{1}{8}\}$,符合题意;

拆逻辑:对于二次项含参数的方程,要分类讨论二次项系数是否为 0

当 $4a \neq 0$,即 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 16(a+2)^2 + 16a = 0$,解得 $a = -1$ 或 $a = -4$,

当 $a = -1$ 时 $A = \{\frac{1}{2}\}$,当 $a = -4$ 时 $A = \{-\frac{1}{4}\}$,均符合题意.

综上可得, a 的所有可能取值组成的集合为 $\{0, -1, -4\}$.

易错专刷

易错点 1 不能正确理解集合的表示方法

8. C 【解析】选项 A 中, $M = \{3, -1\}$ 是数集, $P = \{(3, -1)\}$ 是点集,二者不是同一集合,故 $M \neq P$;选项 B 中, $(3, 1)$ 与 $(1, 3)$ 表示不同的点,故 $M \neq P$;选项 C 中, $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y \geq 1\}$, $P = \{x | x = t^2 + 1, t \in \mathbf{R}\} = \{x | x \geq 1\}$,故 $M = P$;选项 D 中, M 是二次函数 $y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}$ 的所有 y 的值

图重点:是不是同一集合与表示集合中元素的字母无关

组成的集合,而集合 P 是二次函数 $y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}$ 图象上所有点组成的集合,故 $M \neq P$. 故选 C.

9. $\{1, 3, 4\}$ 【解析】当 $x=0$ 时,可得 $\frac{4}{5-0} = \frac{4}{5} \notin \mathbf{N}$,不符合题意;

当 $x=1$ 时,可得 $\frac{4}{5-1} = 1 \in \mathbf{N}$,符合题意;

当 $x=2$ 时,可得 $\frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \notin \mathbf{N}$,不符合题意;

当 $x=3$ 时,可得 $\frac{4}{5-3} = 2 \in \mathbf{N}$,符合题意;

当 $x=4$ 时,可得 $\frac{4}{5-4} = 4 \in \mathbf{N}$,符合题意;

当 $x=5$ 时,显然不成立;

当 $x \geq 6, x \in \mathbf{N}$ 时,可得 $\frac{4}{5-x} < 0$,不符合题意.

所以集合 $\left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{4}{5-x} \in \mathbf{N}\right\}$ 可以用列举法表示为集合 $\{1, 3, 4\}$.

易错警示

用描述法表示集合时,首先要明确集合中的元素是什么,即看竖线前的代表元素,其次看代表元素满足的属性,根据描述的代表元素具有的属性确定其元素构成,与表示元素的字母无关,此外还要注意 $\mathbf{N}$ 表示自然数集,包括 0,这也是易错点.

易错点 2 忽视集合中元素的性质而致误

10.3 【解析】当 $t=2$ 时, $t^2-4t+5=4-8+5=1$, 故不符合题意;
当 $t^2-4t+5=2$ 时, 移项得 $t^2-4t+3=0$, 整理可得 $(t-3)(t-1)=0$, 则 $t=3(t=1$ 不符合题意, 舍去).

易错警示 根据元素与集合的关系求解集合中的参数问题, 求出参数的值后要检验是否满足集合中元素的互异性.

易错点 3 不能正确理解元素与集合的关系而致误

11.C 【解析】对于 A, $\because$ 集合 $A=\{t^2+s^2 \mid t, s \in \mathbf{Z}\}$, $\therefore 1 \in A, 2 \in A. \because 1+2=3 \notin A$, $\therefore$ A 选项“ $x+y \in A$ ”错误. 对于 B, $\because 1-2=-1 \notin A$, $\therefore$ B 选项“ $x-y \in A$ ”错误. 对于 D, $\because \frac{1}{2} \notin A$, $\therefore$ D 选项“ $\frac{x}{y} \in A$ ”错误. 对于 C, 由 $x \in A, y \in A$, 设 $x=t_1^2+s_1^2$, $y=t_2^2+s_2^2$, 且 $t_1, s_1, t_2, s_2 \in \mathbf{Z}$, 则 $xy=(t_1^2+s_1^2)(t_2^2+s_2^2)=(t_1t_2)^2+(t_1s_2)^2+(s_1t_2)^2+(s_1s_2)^2=(t_1t_2)^2+2t_1t_2s_1s_2+$

$(s_1s_2)^2+(t_1s_2)^2-2t_1t_2s_1s_2+(s_1t_2)^2=(t_1t_2+s_1s_2)^2+(t_1s_2-s_1t_2)^2$. 又 $t_1t_2+s_1s_2 \in \mathbf{Z}, t_1s_2-s_1t_2 \in \mathbf{Z}, \therefore xy \in A, C$ 选项正确. 故选 C.

12.BC 【解析】若 $a, b \in A$, 设 $a=3m_1+1, b=3m_2+1, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$, 则 $a+b=3(m_1+m_2)+2, \because m_1+m_2 \in \mathbf{Z}, \therefore a+b \in B$, 故 A 错误, B 正确; 若 $a, b \in B$, 设 $a=3n_1+2, b=3n_2+2, n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$, 则 $ab=(3n_1+2)(3n_2+2)=9n_1n_2+6n_1+6n_2+4=3(3n_1n_2+2n_1+2n_2+1)+1, \because 3n_1n_2+2n_1+2n_2+1 \in \mathbf{Z}, \therefore ab \in A$, 故 C 正确, D

拆逻辑: 将所证元素转化成为集合中元素相同的形式, 对比分析是否满足各个条件

错误. 故选 BC.

易错警示 判断元素与集合的关系, 关键是判断元素是否满足集合中元素的一般属性. 例如, 本题求解的关键是在 $a, b \in A$ 的前提下表示 $a+b$, 在 $a, b \in B$ 的前提下表示 ab , 并判断 $a+b, ab$ 能否写成集合 A 和集合 B 中元素的表示形式.

1.2 集合间的基本关系

基础必刷

1.D 【解析】由题意, $C=\{2, 3, 4, 5\}$, 故其子集可以是 $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$, 因此其子集的个数为 16. 故选 D.

快解 由题意, $C=\{2, 3, 4, 5\}$ 中有 4 个元素, 其子集的个数为 $2^4=16$. 故选 D.

2.AC 【解析】对于 A, 空集中一个元素也没有, 集合 $\{\emptyset\}$ 中有一个元素 $\emptyset$, 所以 A 错误; 对于 B, 由元素与集合的关系可知, $0 \in \{0\}$, 故 B 正确; 对于 C, 由集合与集合的关系可知, $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, 故 C 错误; 对于 D, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, 则 $\{1, 2\} \subseteq \{2, 1\}$, 故 D 正确. 故选 AC.

方法精炼 判断集合间关系的方法

- (1) 对于离散的数集和点集可以采用列举法写出一部分元素, 观察两集合间的关系;
- (2) 对于连续数集可以用数轴分析集合间的关系;
- (3) 对于较为抽象的其他类型的集合可以检验其中一个集合中的元素是否满足另外一个集合中元素所满足的条件, 从而判断该集合是否包含于另外一个集合.

3.B 【解析】(1) $\{0\}$ 不是空集, 故(1)错误;

(2) 因为 $\left\{x \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Q}\right\}$, 若 x 是分子为 1, 分母为正整数的分数, 则 $x \in \mathbf{Q}, \frac{6}{x} \in \mathbf{N}$, 所以 $\left\{x \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Q}\right\}$ 为无限集, 故(2)错误;

(3) 因为 $\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$ 表示由奇数组成的集合, $\{x \mid x=2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$ 也表示由奇数组成的集合, 所以 $\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\} = \{x \mid x=2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$, 故(3)正确. 故选 B.

4.A 【解析】由题意知集合 $A=\{x \mid x^2+3x-4=0\}=\{-4, 1\}$, 对于方程 $x^2+(a+1)x-(a+2)=0$, 其判别式 $\Delta=(a+1)^2+4(a+2)=a^2+6a+9=(a+3)^2 \geq 0$ 恒成立, 所以方程恒有解, 可解得 $x_1=-a-2, x_2=1$.

①当 $-a-2=1$, 即 $a=-3$ 时, $B \subseteq A$ 成立;

②当 $-a-2 \neq 1$, 即 $a \neq -3$ 时, 因为 $B \subseteq A$, 所以 $-a-2=-4$, 解得 $a=2$.

综上所述, 实数 a 的取值集合为 $\{-3, 2\}$. 故选 A.

5.ABD 【解析】根据题意, $ax^2+x+a=0$ 只有一个实数根.

当 $a=0$ 时, $ax^2+x+a=0$ 化为 $x=0$, 所以 $b=0$.

防雷区: 二次项含参时, 只有一个实数根也可能是一次方程

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta=1-4a^2=0$, 则 $a=\pm \frac{1}{2}$.

若 $a=\frac{1}{2}$, 则 $ax^2+x+a=0$ 的解集为 $\{-1\}$, 所以 $b=-1$;

若 $a=-\frac{1}{2}$, 则 $ax^2+x+a=0$ 的解集为 $\{1\}$, 所以 $b=1$.

故选 ABD.

6. $\{1, 2, 5\}$ 【解析】由题意可知, $1 \in A, 2 \in A$.

若 $a^2-2a+2=2$, 解得 $a=0$ 或 $a=2$,

当 $a=0$ 时, $a^2+1=1$, 与集合中元素间的互异性矛盾, 舍去;

当 $a=2$ 时, $A=\{1, 2, 5\}$, 满足题意.

若 $a^2+1=2$, 解得 $a=-1$ 或 $a=1$,

当 $a=-1$ 时, $A=\{1, 2, 5\}$, 满足题意;

当 $a=1$ 时, $a^2-2a+2=1$, 与集合中元素间的互异性矛盾, 舍去.

综上, 集合 $A=\{1, 2, 5\}$.

⚡ **防区:** 注意答案写为集合的形式

高手视角 根据集合中的元素求出参数后, 一定要验证是否满足集合中元素间的互异性, 舍去错误的参数值.

易错专刷

易错点 1 混淆集合与元素、集合与集合之间的关系而致误

7. C 【解析】因为 $M=\left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{1}{x-2} \leqslant 0\right\}=\{0, 1\}$,

所以 $0 \in M$, A 错误; $2 \notin M$, B 错误; $\{1\} \subseteq M$, C 正确; $1 \in M$, D 错误. 故选 C.

易错警示 元素与集合之间是“属于”或“不属于”的关系, 集合与集合之间是“包含”“真包含”以及“不包含”“相等”的关系. 而 $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 之间既可以是“属于”, 也可以是“包含”的关系.

易错点 2 求解含参数的子集或真子集问题时忽视空集而致误

8. $\{a \mid a \leqslant -3 \text{ 或 } 1 \leqslant a < 2\}$

【解析】当 $B=\emptyset$ 时, 满足 $B \subseteq A$, 此时 $a \geqslant 2a+3$, 解得 $a \leqslant -3$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 要使 $B \subseteq A$, 只需 $\begin{cases} a < 2a+3, \\ a \geqslant 1, \\ 2a+3 < 7, \end{cases}$ 解得 $1 \leqslant a < 2$.

所以实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \leqslant -3 \text{ 或 } 1 \leqslant a < 2\}$.

易错警示

因为空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集, 所以当含参集合是另一个确定集合的子集或真子集时, 要考虑含参集合是空集的情况, 在本题中, B 集合未确定, 因此需要对 B 集合是否为空集进行分类讨论.

易错点 3 求解含参数的集合相等时忽视集合中元素属性的检验致误

9. C 【解析】由集合 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}=\left\{a^2, a+b, 0\right\}$, 可得 $a \neq 0, a \neq 1$

且 $a \neq b$, 则 $\frac{b}{a}=0$, 即 $b=0$, 所以 $\{a, 0, 1\}=\{a^2, a, 0\}$, 则 $a^2=1$, 解得 $a=-1$ 或 $a=1$ (舍去), 此时集合 $\{-1, 0, 1\}=\{-1, -1, 0\}$, 满足题意. 综上可得, $a=-1, b=0$, 所以 $a^{2^{025}}-b^{2^{026}}=(-1)^{2^{025}}-0^{2^{026}}=-1$. 故选 C.

易错警示

由于集合中的元素必须具备互异性, 任意两个元素都不能相同, 所以在解决此类问题时, 求出参数的值后, 必须将其代入原集合进行检验, 把不满足元素的互异性要求的相应参数值舍去.

1.3 集合的基本运算

基础必刷

1. B 【解析】由 $P=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 0\}, M=\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leqslant 1\}=\{-1, 0, 1\}$, 得 $P \cap M=\{-1, 0\}$. 故选 B.

方法精炼 求集合 A 与 B 的交集的步骤

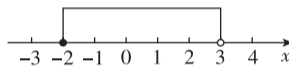
- (1) 搞清集合 A, B 的代表元素是什么;
- (2) 化简集合 A, B ;
- (3) 把集合 A, B 的所有公共元素都写出来或表示出来即可 (若无公共元素, 则所求交集为 $\emptyset$).

2. C 【解析】由题意得, 集合 $S=\{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}, T=\{\cdots, -3, 1, 5, 9, \cdots\}$, 所以 $T \not\subseteq S$, 所以 $S \cap T=T$. 故选 C.

3. A 【解析】根据图形, 阴影部分属于集合 B , 不属于集合 A, C , 则阴影部分所表示的集合可以为 $B \cap [\complement_U(A \cup C)]$. 故选 A.

4. B 【解析】因为 $A \cap B=\{5\}, A \cap (\complement_U B)=\{2, 3, 6\}$, 所以 $A=\{2, 3, 5, 6\}, \complement_U A=\{4, 7, 8\}$, 且 $5 \in B, 2 \notin B, 3 \notin B, 6 \notin B$, 所以 $(\complement_U A) \cup B=\{4, 5, 7, 8\}$. 故选 B.

5. C 【解析】 $\because$ 全集为 $\mathbf{R}, M=\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x \geqslant 3\}, \therefore \complement_{\mathbf{R}} M=\{x \mid -2 \leqslant x < 3\}$. 又 $N=\{x \mid x-a \leqslant 0\}=\{x \mid x \leqslant a\}, N \cap (\complement_{\mathbf{R}} M)=\emptyset$, 在数轴上表示出集合 $\complement_{\mathbf{R}} M$,



则结合数轴可知, 当 $a < -2$ 时, $N \cap (\complement_{\mathbf{R}} M)=\emptyset$,

⚡ **防区:** 注意端点值的取舍

故实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a < -2\}$, 故选 C.

6. AD 【解析】由题知 $U=A \cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 所以 $A \cup B$ 的子集个数为 $2^{11}=2\,048$. 又 $A \cap (\complement_U B)=\{1, 3, 5, 7\}, (\complement_U A) \cap B=\{2, 8, 9, 10\}$, 所以 $A \cap B=\{0, 4, 6\}, A=\{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 所以 $A \cap B$ 的非空真子集有 6 个, 故 A, D 正确. 故选 AD.

7. $\{a \mid a \leqslant 1 \text{ 或 } a \geqslant 3\}$ 【解析】由题可知, $A \neq \emptyset$.

若 $A \cap B=\emptyset$, 则 $\begin{cases} a-1 > 0, \\ a+2 < 5, \end{cases}$ 解得 $1 < a < 3$.

所以当 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, $a \leqslant 1$ 或 $a \geqslant 3$.

所以实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \leqslant 1 \text{ 或 } a \geqslant 3\}$.

8.4 【解析】 设集合 A = “参加了合唱社团的学生”, B = “参加了编程社团的学生”, C = “参加了漫画社团的学生”. 根据题意, 可得 $\text{card}(A) = 16, \text{card}(B) = 17, \text{card}(C) = 18, \text{card}(A \cap B \cap C) = 0$, 因为有 10 名学生同时参加了 2 个社团, 所以 $\text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C) = 10$, 所以参加社团的总人数为 $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) = 16 + 17 + 18 - 10 = 41$, 所以 3 个社团都不参加的学生的人数为 $45 - 41 = 4$.

拆逻辑: 每名学生最多只能参加 2 个社团

$B) + \text{card}(A \cap C) + \text{card}(B \cap C) = 10$, 所以参加社团的总人数为 $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) = 16 + 17 + 18 - 10 = 41$, 所以 3 个社团都不参加的学生的人数为 $45 - 41 = 4$.

易错专训

易错点 1 两集合运算, 忽视集合的代表元素

9. $\{(0, 1)\}$ 【解析】 集合 $M = \{(x, y) | y = x + 1\}$ 与 $N = \{(x, y) | y = -x + 1\}$ 均为点集, $M \cap N$ 表示直线 $y = x + 1$ 与直线 $y = -x + 1$ 的交点构成的集合. 由 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$, 所以 $M \cap N = \{(0, 1)\}$.

易错警示 求两集合的交集运算时, 首先应明确集合的代表元素是实数还是点的坐标还是其他的一些元素, 本题中两集合的代表元素是点的坐标, 因此本题的答案是 $\{(0, 1)\}$, 而不是 $\{0, 1\}$.

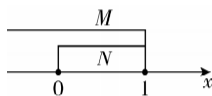
10. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ 【解析】 $A = \{x | |x - 1| \leq 1\} = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$,

由 B 中 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 得 $1 - x > 0$, 解得 $x < 1$.

$\therefore$ 全集 $U = \mathbf{R}, \therefore \complement_U B = \{x | x \geq 1\}$,

故 $A \cap (\complement_U B) = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$.

11. $\{x | x < 0\} \quad \{x | x \geq 0\}$ 【解析】 在数轴上表示出集合 M, N , 如图.



所以 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\} = \{x | x < 0\}, \complement_{\mathbf{R}}(M - N) =$

$\{x | x \geq 0\}$.

易错警示 本题的易错点是集合 M 与 N 中的代表元素一个是 x , 另一个是 y , 从而错误地认为它们之间没有任何关系, 进而认为 $M - N = M$. 产生这种错误的原因是不能正确理解集合表示方法的内涵.

易错点 2 不能正确利用性质进行转化而致误

12. C 【解析】 $\because A \cap B = B, \therefore B \subseteq A, \therefore m^2 = 9 \text{ 或 } m^2 = m,$

$\therefore m = \pm 3 \text{ 或 } m = 0 \text{ 或 } m = 1.$

当 $m = -3$ 时, $A = \{1, 9, -3\}, B = \{9, 1\}$, 符合题意;

当 $m = 3$ 时, $A = \{1, 9, 3\}, B = \{9, 1\}$, 符合题意;

当 $m = 0$ 时, $A = \{1, 9, 0\}, B = \{0, 1\}$, 符合题意;

当 $m = 1$ 时, $A = \{1, 9, 1\}, B = \{1, 1\}$, 不满足集合中元素的互异性, 不符合题意.

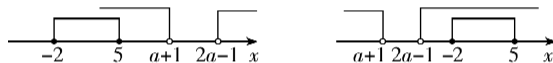
$\therefore$ 满足条件的实数 m 的值是 0, 3, -3. 故选 C.

易错警示 求解本题的关键是将 $A \cap B = B$ 转化为 $B \subseteq A$, 并且求出 m 的值后要检验是否满足集合中元素的互异性.

13. $\{a | a < 2 \text{ 或 } a > 4\}$ 【解析】 $\because A \cap (\complement_U B) = A, \therefore A \subseteq \complement_U B$. 若 $B = \emptyset$, 则 $a + 1 > 2a - 1$, 即 $a < 2$, 此时 $\complement_U B = \mathbf{R}, A \subseteq \complement_U B$, 符合题意. 若 $B \neq \emptyset$, 则 $a + 1 \leq 2a - 1$, 即 $a \geq 2$, 此时 $\complement_U B = \{x | x < a + 1 \text{ 或 } x > 2a - 1\}$.

由于 $A \subseteq \complement_U B$, 如图, 则 $\begin{cases} a \geq 2, \\ a + 1 > 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a \geq 2, \\ 2a - 1 < -2 \end{cases}$, 解得 $a > 4$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\{a | a < 2 \text{ 或 } a > 4\}$.



易错警示 求解本题的关键是将 $A \cap (\complement_U B) = A$ 转化为 $A \subseteq \complement_U B$, 注意不要忘记讨论集合 B 为空集 (此时 $\complement_U B = \mathbf{R}$) 的特殊情况.

1.4 充分条件与必要条件

基础必刷

1. B 【解析】 (1) 是一个感叹句, 不能判断真假, 故不是命题;
(2) 0 是自然数, 显然这句话是对的, 因此是命题, 而且是真命题;

(3) 因为 $a^2 + 1 > 0 (a \in \mathbf{R})$ 是正确的, 所以 $a^2 + 1 > 0 (a \in \mathbf{R})$ 是命题, 而且是真命题;

(4) 不能判断 $x > 3$ 是否正确, 所以 $x > 3$ 不是命题.

综上, 只有 (2) (3) 是命题. 故选 B.

2. A 【解析】 由 $\frac{1}{x} < 1$, 解得 $x > 1$ 或 $x < 0$, 所以 “ $x > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{x} < 1$ ” 的充分不必要条件. 故选 A.

3. AC 【解析】 若 $P \subseteq Q$, 则 $P \cap Q = P, P \cup Q = Q$, 故是 “集合 P

是集合 Q 的子集” 的必要条件的是 AC 选项. 故选 AC.

4. A 【解析】 “ $x > \lambda$ ” 是 “ $x > 2$ 或 $x < -1$ ” 的充分不必要条件, 可知 $\{x | x > \lambda\}$ 是 $\{x | x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$ 的真子集, 所以 $\lambda \geq 2$. 故选 A.

5. B 【解析】 $\because 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, \therefore -1 \leq x + y \leq 1$, 即 “ $-1 \leq$

$x + y \leq 1$ ” 是 “ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ ” 的必要条件.

$\therefore -1 \leq x + y \leq 1, \therefore$ 当 $x = -1, 0 \leq y \leq 2$ 时满足此不等式,

$\therefore$ “ $-1 \leq x + y \leq 1$ ” 不是 “ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ ” 的充分条件.

故 “ $-1 \leq x + y \leq 1$ ” 是 “ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ ” 的必要不充分条件,

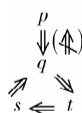
故选 B.

6. A 【解析】对于 A, 集合 $\{1, 2\}$ 的真子集为 $\emptyset, \{1\}, \{2\}$, 故 A

→ 防区: 空集是所有非空集合的真子集

是假命题; 对于 B, 由 $\{1, a\} = \{2, b\}$, 得 $a = 2, b = 1$, 所以 $a + b = 3$, 故 B 是真命题; 对于 C, 因为 $\{x | x = 6z, z \in \mathbf{N}\} = \{x | x = 3 \times 2z, z \in \mathbf{N}\}$, 所以 $\{x | x = 6z, z \in \mathbf{N}\} \subseteq \{x | x = 3k, k \in \mathbf{N}\}$, 故 C 是真命题; 对于 D, 因为 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ 等价于 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ac$, 等价于 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$, 所以 “ $a = b = c$ ” 是 “ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ ” 的充要条件, 故 D 是真命题. 故选 A.

7. BD 【解析】由题意可知, p, q, s, t 之间的逻辑关系如图所示, 则 $p \Rightarrow q \Rightarrow t, t \not\Rightarrow p$, 因此 t 是 p 的必要不充分条件, A 选项错误;



$t \Rightarrow s \Rightarrow q, q \Rightarrow t$, 所以 t 是 q 的充要条件, B 选项正确;

$p \Rightarrow q \Rightarrow t \Rightarrow s, s \not\Rightarrow p$, 因此 p 不是 s 的充要条件, C 选项错误;

$q \Rightarrow t \Rightarrow s, s \Rightarrow q$, 所以 q 是 s 的充要条件, D 选项正确. 故选 BD.

8. ABC 【解析】题图①中, 开关 A 闭合, 灯泡 B 亮; 而灯泡 B 亮时, 开关 A 不一定闭合, 故开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充分

→ 重点: 根据物理中电路并联知识可知灯泡亮时两个开关中只要有一个闭合即可

不必要条件, 因此选项 A 正确. 题图②中, 开关 A 闭合, 灯泡 B 不一定亮; 而灯泡 B 亮, 开关 A 必须闭合, 故开关 A 闭合是灯泡 B 亮的必要不充分条件, 因此选项 B 正确. 题图③中, 开关 A 闭合, 灯泡 B 亮; 而灯泡 B 亮, 开关 A 必须闭合, 所以开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充要条件, 因此选项 C 正确. 题图④中, 开关 A 闭合, 灯泡 B 不一定亮; 而灯泡 B 亮, 开关 A 不一定闭合, 所以开关 A 闭合是灯泡 B 亮的既不充分也不必要条件, 因此选项 D 错误. 故选 ABC.

9. 1 【解析】因为 p 是 q 的必要条件,

所以 $\{x | 1 < x < 3\} \subseteq \{x | m < x < m + 2\}$,

所以 $\begin{cases} m+2 \geq 3, \\ m \leq 1, \end{cases}$ 解得 $m = 1$,

则实数 m 的取值范围是 $\{1\}$.

易错专训

易错点 1 条件判断不全面而致误

10. A 【解析】当 $a = b = c = 0$ 时, 满足 $2b = a + c$, 但此时 $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} =$

2 不成立;

反过来 $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 2$ 能推出 $2b = a + c$. 故甲是乙的必要不充分条件. 故选 A.

易错警示

充分条件、必要条件的判断问题, 若直接判断条件与结论之间的关系, 需要严格推理论证, 若考虑问题不全面, 则会造成错解, 如本题中若忽视了 $b = 0$ 的情况, 则会造成错解.

11. B 【解析】集合 $M = \{x | ax^2 - x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 仅有 1 个真子集, 即集合 M 中只有一个元素.

若 $a = 0$, 方程 $ax^2 - x + 2 = 0$ 等价于 $-x + 2 = 0$, 解得 $x = 2$, 满足条件;

若 $a \neq 0$, 方程 $ax^2 - x + 2 = 0$ 要满足 $\Delta = 1 - 8a = 0$, 解得 $a = \frac{1}{8}$.

则集合 $M = \{x | ax^2 - x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 仅有 1 个真子集, 此时 $a = 0$ 或 $a = \frac{1}{8}$.

因为当 $a = \frac{1}{8}$ 时满足集合 M 仅有 1 个真子集, 集合 M 仅有 1

个真子集时不一定有 $a = \frac{1}{8}$,

所以 “ $a = \frac{1}{8}$ ” 是 “集合 M 仅有 1 个真子集” 的充分不必要条件. 故选 B.

易错警示

本题判断充分条件与必要条件时, 由真子集个数得到集合 M 只有一个元素, 需要分 $a = 0$ 和 $a \neq 0$ 两种情况判断, 否则会因讨论不全而致误.

易错点 2 不能正确理解条件与结论之间的关系而致误

12. ABC 【解析】当 $a = 0$ 时, 方程为 $4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$, 此时

方程的根为负根.

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 + 4x + 1 = 0$,

当方程有两个负根时, 则有 $\begin{cases} 16 - 4a \geq 0, \\ -\frac{4}{a} < 0, \\ \frac{1}{a} > 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq 4$;

当方程有一个负根和一个正根时, 则有 $\frac{1}{a} < 0$, 即 $a < 0$.

综上所述, 当关于 x 的方程 $ax^2 + 4x + 1 = 0$ 至少有一个负根时, $a \leq 4$. 选项 ABC 符合题意. 故选 ABC.

13. AD 【解析】由 $-\frac{11}{2} < 5x - 3 < 12$, 可得 $-\frac{1}{2} < x < 3$,

当 x 满足 $-\frac{1}{2} < x < 3$ 时, 必定满足 $-\frac{1}{2} < x < 4$ 和 $-1 < x < 6$,

而不一定满足 $-\frac{1}{2} < x < 2$ 和 $-3 < x < \frac{1}{2}$, 因此 $-\frac{11}{2} < 5x - 3 < 12$ 的

一个必要条件可以是 $-\frac{1}{2} < x < 4$ 或 $-1 < x < 6$, 故选 AD.

易错警示

对于充分条件、必要条件的判断, 应首先明确条件与结论分别是什么, 其次判断条件与结论之间的推出关系, 根据当 $A \Rightarrow B$ 时, A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件 (此时 A 的必要条件是 B) 来判断, 解题时需要注意题干的叙述.

1.5 全称量词与存在量词

基础必刷

1. AB 【解析】对于 A, 是存在量词命题, 当 $x = -1$ 时, 满足 $x^2 - x - 2 = 0$, 所以 A 是真命题;

对于 B, 是存在量词命题, 15 能同时被 3 和 5 整除, 所以 B 是真命题;

对于 C, 是存在量词命题, 因为所有实数的平方非负, 即 $x^2 \geq 0$, 所以 C 是假命题;

对于 D, 是全称量词命题, 所以不符合题意. 故选 AB.

2. C 【解析】根据全称量词命题的否定, 命题“ $\forall x > 2, x^2 - 1 > 0$ ”的否定是 $\exists x > 2, x^2 - 1 \leq 0$. 故选 C.

拆逻辑: 改量词, 否结论

3. D 【解析】与“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 < 0$ ”表述一致的是“至少有一个实数 x , 使得 $x^2 + 1 < 0$ ”. 故选 D.

4. CD 【解析】命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2n - 5$, 则命题 p 的否定为 $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2n - 5$, A 选项错误; 当 $x = -2, y = -1$ 时, 满足 $x^2 > y^2$, 不满足 $x > y > 0$, 所以“ $x > y > 0$ ”不是“ $x^2 > y^2$ ”的充要条件, B 选项错误; 对任意实数 a , 二次函数 $y = -2x^2 + a$ 的图象关于直线 $x = 0$, 即 y 轴对称, C 选项正确; 当 $a > b, c = 0$ 时, 得 $ac = bc$, 则命题“若 $a > b$, 则 $ac > bc$ ”是假命题, D 选项正确. 故选 CD.

拆逻辑: 要证明全称量词命题不成立, 举出一个反例即可

5. $\left\{ a \mid -1 \leq a \leq \frac{2}{5} \right\}$ 【解析】对于命题 p , 由题意可知, $5a \leq x^2 + 2$, 又 $x^2 + 2 \geq 2$, 所以 $5a \leq 2$, 即 $a \leq \frac{2}{5}$.

若 q 是假命题, 则 $\neg q: \forall x \in \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$, 使得 $ax + a - 1 \leq 0$ 是真命题,

$$\text{即 } \begin{cases} -2a + a - 1 \leq 0, \\ a + a - 1 \leq 0, \end{cases} \text{ 解得 } -1 \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

若 p 是真命题, q 是假命题, 则 $\begin{cases} a \leq \frac{2}{5}, \\ -1 \leq a \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $-1 \leq a \leq \frac{2}{5}$.

因此实数 a 的取值范围为 $\left\{ a \mid -1 \leq a \leq \frac{2}{5} \right\}$.

6. 【解】(1) 由题意可得, 关于 x 的方程 $x^2 - 6x + a^2 = 0$ 有解, 所以 $\Delta = 36 - 4a^2 \geq 0$, 解得 $-3 \leq a \leq 3$, 故 $A = \{a \mid -3 \leq a \leq 3\}$.

(2) 因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要条件,

所以 $B \subseteq A$, 又因为 B 为非空集合,

$$\text{所以 } \begin{cases} 3m - 2 \leq m - 1, \\ 3m - 2 \geq -3, \\ m - 1 \leq 3, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2},$$

故实数 m 的取值范围为 $\left\{ m \mid -\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2} \right\}$.

易错专刷

易错点 1 忽视否定的对象而致误

7. $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{2}{x-3} \geq 0$ 或 $x = 3$ 【解析】命题 p 是一个全称量词命题, 它的否定是存在量词命题, 其否定为 $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{2}{x-3} \geq 0$ 或 $x = 3$.

易错警示

本题的易错之处是忽视已知命题中的隐含条件, 遗漏 $x = 3$.

8. $\exists a, b \in \mathbf{R}$, 方程 $ax + b = 2$ 无解或至少有两解 【解析】恰有一解的否定为无解或至少有两解, 因此 $\neg p: \exists a, b \in \mathbf{R}$, 方程 $ax + b = 2$ 无解或至少有两解.

易错警示

本题中的方程为 $ax + b = 2$, 当 $a \neq 0$ 时, 是一次方程, 因此本题的易错之处是误认为恰有一个解的否定是无解, 从而造成错误的写法.

易错点 2 不能正确理解否定词而致误

9. 【解】(1) 否定形式: 存在两个无理数的积是无理数, 该命题是真命题.

(2) 否定形式: $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$, 为假命题.

因为 $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 恒成立, 所以不存在 $x \in \mathbf{R}$ 使得 $x^2 + x + 1 \leq 0$.

(3) 否定形式: 存在能被 3 整除的整数, 其各位数字之和不能被 6 整除, 该命题是真命题.

易错警示

给出一个命题, 先判断命题是全称量词命题还是存在量词命题, 这是正确写出命题的否定形式的前提, 要注意一些量词的否定, 比如, “都”的否定是“不都”, “全是”的否定是“不全是”, “至少一个”的否定是“一个也没有”. 另一方面, 判断全称量词命题的真假时, 需要对指定集合中的元素逐一判断是否满足条件, 确保都满足条件即为真命题, 反之为假命题. 判断存在量词命题的真假时, 只要指定集合中有一个元素满足条件即为真命题, 反之为假命题. 另外, 原命题与它的否定的真假关系是一真一假, 有时可以利用这一关系, 间接判断所给命题的真假.

第一章全章训练

1. A 【解析】因为 $U = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 6, 7\}$, 所以 $\complement_U A = \{0, 1, 4, 5\}$. 因为 $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 所以 $(\complement_U A) \cap B = \{4, 5\}$. 故选 A.

2. B 【解析】对于命题 p , 由于 $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, 当 $x = \frac{1}{2}$

时等号成立, 故命题 p 是假命题, $\neg p$ 为真命题.

对于命题 q , 取 $x = -1$, 则 $x^3 = (-1)^3 = -1 = x$, 故命题 q 为真命题.

拆逻辑: 证明存在量词命题为真命题, 只要找到一个符合的例子即可

题, $\neg q$ 为假命题, 故选 B.

3. A 【解析】当 $x = -1$ 时, $y^2 \leq 2$, 得 $y = -1, 0, 1$, 此时 A 中的元素有 $(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1)$;
当 $x = 0$ 时, $y^2 \leq 3$, 得 $y = -1, 0, 1$, 此时 A 中的元素有 $(0, -1), (0, 0), (0, 1)$;
当 $x = 1$ 时, $y^2 \leq 2$, 得 $y = -1, 0, 1$, 此时 A 中的元素有 $(1, -1), (1, 0), (1, 1)$.

综上, 集合 A 中元素有 9 个. 故选 A.

4. B 【解析】该命题是全称量词命题, 且该命题的否定: 有些

菱形不是中心对称图形. 故选 B.

5. B 【解析】由题意可知, 集合 A 中一定包含元素 1, 2, 一定不包含元素 3, 且 A 是 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的真子集, 所以 $A = \{1, 2\}$ 或 $\{1, 2, 4\}$ 或 $\{1, 2, 5\}$ 或 $\{1, 2, 4, 5\}$, 即满足条件的集合 A 有 4 个. 故选 B.

6. B 【解析】 $a > b$ 无法推出 $a - 1 > b$, 故 A 错误;

$a > b$ 能推出 $a + 1 > b$, 故 “ $a + 1 > b$ ” 是 “ $a > b$ ” 的必要条件, 且 $a + 1 > b$ 不能推出 $a > b$, 故 “ $a + 1 > b$ ” 不是 “ $a > b$ ” 的充分条件, 故 B 正确;

当 $a = 2, b = -3$ 时, 满足 $a > b$, 但 $|a| < |b|$, 故 $a > b$ 不能推出 $|a| > |b|$, 因此选项 C 不是 “ $a > b$ ” 的必要条件, 故 C 错误;

当 $a > 0 > b$ 时无法推出 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 因此选项 D 不是 “ $a > b$ ” 的必要条件, 故 D 错误. 故选 B.

7. A 【解析】若 $a = 1$, 则方程 $ax^2 - 2x + 1 = 0$ 变为 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 即 $(x - 1)^2 = 0$, 解得 $x = 1$,
 $\therefore$ 方程有两个相等的实数根 1, 即 $M = \{1\}$ 仅有一个真子集 $\emptyset$, $\therefore$ “ $a = 1$ ” 能推出 “ M 仅有 1 个真子集”, 故充分性成立;
若 “ M 仅有 1 个真子集”, 则 “ M 中仅有 1 个元素”, 当 $a = 0$ 时, $-2x + 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 则 $M = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ 仅有一个真子集 $\emptyset$, 当 $a = 1$ 时, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, 解得 $x = 1$, 即 $M = \{1\}$ 也仅有一个真子集 $\emptyset$, $\therefore$ “ M 仅有 1 个真子集” 不能推出 “ $a = 1$ ”, 故必要性不成立. 故选 A.

8. A 【解析】由命题 “ $\exists m \in \mathbf{R}, A \cap B \neq \emptyset$ ” 为假命题, 得 “ $\forall m \in \mathbf{R}, A \cap B = \emptyset$ ” 为真命题,
而 $A = \{x | 0 \leq x \leq a\}, B = \{x | m^2 + 3 \leq x \leq m^2 + 4\}$, 则 $\forall m \in \mathbf{R}$, 当 $A = \emptyset$ 时, $a < 0$, 符合题意; 当 $A \neq \emptyset$ 时, $0 \leq a < m^2 + 3$, 又 $m^2 + 3 \geq 3$, 因此 $0 \leq a < 3$. 综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a | a < 3\}$.
故选 A.

9. ABD 【解析】对于 A 选项, 由题图可知, I 部分表示 $\complement_U(A \cup B \cup C)$, 故 A 正确;
对于 B 选项, 由题图可知, II 部分表示 $A \cap B \cap C$, 故 B 正确;
对于 C 选项, 在 III 部分所表示的集合中任取一个元素 x , 则 $x \in B$ 且 $x \notin (A \cup C)$, 故 III 部分表示 $B \cap \complement_U(A \cup C)$, 故 C 错误;

对于 D 选项, 在 IV 部分所表示的集合中任取一个元素 a , 则 $a \in (A \cap B)$ 且 $a \notin (A \cap B \cap C)$, 所以 IV 部分表示 $(A \cap B) \cap \complement_U(A \cap B \cap C)$, 故 D 正确. 故选 ABD.

10. ABD 【解析】A: 因为 $\left\{x \mid 0 < x < 2\right\} \subseteq \left\{x \mid -1 < x < 7\right\}$, 所以 A

正确. B: 由 $a > 1$, 得 $0 < \frac{1}{a} < 1$, 所以 $\frac{1}{a} < 1$ 成立; 由 $\frac{1}{a} < 1$, 得 $a < 0$ 或 $a > 1$, 所以 “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的充分不必要条件, 故 B 正

确. C: 由 $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$, 得 $x^2 \geq 4, y^2 \geq 4$, 则 $x^2 + y^2 \geq 8$, 故 $x^2 + y^2 \geq 4$ 成立; 但 $x^2 + y^2 \geq 4$ 时, 如 $x = -3, y = 4$, 此时 “ $x \geq 2$ 且 $y \geq 2$ ” 不成立, 故 C 错误. D: 当 $a \neq 0, b = 0$ 时, $ab \neq 0$ 不成立; 但 $ab \neq 0$ 时, 一定有 $a \neq 0$, 所以 “ $a \neq 0$ ” 是 “ $ab \neq 0$ ” 的必要不充分条件, 故 D 正确. 故选 ABD.

方法精炼

一般地, 证明 “ p 是 q 的充要条件” 时, 证明要分两个方面: 一是证充分性, 二是证必要性. 证明充分性时, 应以 p 为 “已知条件”, q 是该步中要证明的 “结论”, 即 $p \Rightarrow q$; 证明必要性时, 则是以 q 为 “已知条件”, p 为该步中要证明的 “结论”, 即 $q \Rightarrow p$.

11. ACD 【解析】根据题意可知, $A \cap B \cap C$ 代表的是除以 3 余数为 2, 除以 5 余数为 3, 除以 7 余数为 2 的整数.

对于 A, 可知 $23 \div 3 = 7 \cdots 2, 23 \div 5 = 4 \cdots 3, 23 \div 7 = 3 \cdots 2$, 故 A 正确;

对于 B, 可得 $68 \div 3 = 22 \cdots 2, 68 \div 5 = 13 \cdots 3, 68 \div 7 = 9 \cdots 5$, 不合题意, 故 B 错误;

对于 C, 可得 $128 \div 3 = 42 \cdots 2, 128 \div 5 = 25 \cdots 3, 128 \div 7 = 18 \cdots 2$, 故 C 正确;

对于 D, 易知 $233 \div 3 = 77 \cdots 2, 233 \div 5 = 46 \cdots 3, 233 \div 7 = 33 \cdots 2$, 故 D 正确.

故选 ACD.

12. {5, 6, 7} 【解析】 $\because U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \complement_U(A \cup B) = \{1, 3\}, \therefore A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$. 又 $A \cap (\complement_U B) = \{2, 4\}, \therefore 2 \notin B$ 且 $4 \notin B$, $\therefore$ 集合 $B = \{5, 6, 7\}$.

13. [-2] 【解析】因为 $M = \left\{2, 3, a^2 - 3a, a + \frac{2}{a} + 7\right\}, N = \{a - 1, 3\}, 4 \in M$ 且 $4 \notin N$,

若 $a^2 - 3a = 4$, 解得 $a = 4$ 或 $a = -1$,

当 $a = 4$ 时, $a + \frac{2}{a} + 7 = \frac{23}{2}$, 此时 $N = \{3, 3\}$, 不满足集合中元素的互异性, 舍去;

当 $a = -1$ 时, $a + \frac{2}{a} + 7 = -1 + \frac{2}{-1} + 7 = 4$, 此时 $M = \{2, 3, 4, 4\}$, 不满足集合中元素的互异性, 舍去.

若 $a + \frac{2}{a} + 7 = 4$, 解得 $a = -1$ (舍去) 或 $a = -2$,

当 $a = -2$ 时, $a^2 - 3a = (-2)^2 - 3 \times (-2) = 10$, 此时集合 $M = \{2, 3, 10, 4\}$, $N = \{-3, 3\}$, 符合题意.

综上, $a = -2$, 所以 a 的取值集合为 $\{-2\}$.

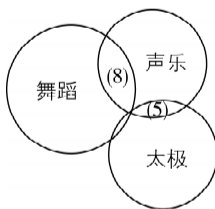
14. ②③④ 【解析】如图, 设同时报名舞蹈和报名太极的有 x 人,

则 $45 + 26 + 33 - 90 = 5 + 8 + x$, 解得 $x = 1$,

所以同时报名舞蹈和报名太极的有 1 人,

只报名舞蹈的有 $45 - 8 - 1 = 36$ (人), 只报名声乐的有 $33 - 8 - 5 = 20$ (人),

报名两门课程的有 $8 + 5 + 1 = 14$ (人).



15. 【解】(1) $\because A = \{2, 4, x^2 - 5x + 9\} = \{2, 3, 4\}$, $\therefore x^2 - 5x + 9 = 3$, $\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$.

(2) 若 $2 \in B$, $B \subseteq A$, 则 $\begin{cases} x^2 + ax + a = 2, \\ x^2 - 5x + 9 = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2, \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$

或 $\begin{cases} x = 3, \\ a = -\frac{7}{4}. \end{cases}$

16. 【解】(1) 由题知全集 $U = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

因为 $A = \{0, 1, 3, 4, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 所以 $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) = \{2, 8\}$.

(2) 因为 $M = \{x \mid x < 3\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} M = \{x \mid x \geq 3\}$. 又因为 $P = \{x \mid 0 < x < 5\}$, 所以 $(\complement_{\mathbf{R}} M) \cap P = \{x \mid 3 \leq x < 5\}$.

17. 【解】(1) 当 $m = 3$ 时, $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$, 又 $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$, 所以 $A \cap B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$.

又 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$,

所以 $A \cup (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$.

(2) 若选①, 因为“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 所以 A 是 B 的真子集.

若 $A = \emptyset$, 则 $m - 1 > 2m$, 解得 $m < -1$;

若 $A \neq \emptyset$, 则 $\begin{cases} m - 1 \leq 2m, \\ m - 1 \geq 0, \text{ 且 } m - 1 \geq 0 \text{ 与 } 2m \leq 3 \text{ 的等号不能} \\ 2m \leq 3, \end{cases}$

同时成立, 解得 $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $\left\{ m \mid m < -1 \text{ 或 } 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \right\}$.

若选②, 因为 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset$, 所以 $A \subseteq B$.

若 $A = \emptyset$, 则 $m - 1 > 2m$, 解得 $m < -1$;

若 $A \neq \emptyset$, 则 $\begin{cases} m - 1 \leq 2m, \\ m - 1 \geq 0, \text{ 解得 } 1 \leq m \leq \frac{3}{2}. \\ 2m \leq 3, \end{cases}$

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $\left\{ m \mid m < -1 \text{ 或 } 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \right\}$.

若选③, 因为 $A \cup B = B$, 所以 $A \subseteq B$, 下同选②.

18. 【解】(1) 由 $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - m - 3 = 0$, 得 $[x - (m + 1)] \cdot [x - (2m - 3)] = 0$, 所以 $x = m + 1$ 或 $x = 2m - 3$.

因为命题 p 为真命题, 所以 $\begin{cases} -5 < m + 1 < 4, \\ -5 < 2m - 3 < 4, \end{cases}$ 解得 $-1 < m < 3$.

所以 $A = \{m \mid -1 < m < 3\}$.

(2) 集合 $A = \{m \mid -1 < m < 3\}$, $B = \{m \mid 1 - a < m < 1 + a\}$.

由题设可得, B 是 A 的真子集.

当 $B = \emptyset$ 时, $1 - a \geq 1 + a$, 解得 $a \leq 0$, 满足题意;

当 $B \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} 1 - a < 1 + a, \\ 1 - a > -1, \text{ 或 } 1 - a \geq -1, \text{ 解得 } 0 < a < 2. \\ 1 + a \leq 3 \end{cases}$

综上所述, $a < 2$. 所以实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a < 2\}$.

19. (1) 【解】因为 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, 所以 $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{6\}$, 所以 $A \triangle B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$.

(2) 【解】因为 $A = \left\{ 2, a, \frac{b}{a} \right\}$, $B = \{1, b, a + b\}$, $A \triangle B = \{2, 0\}$,

则 $0 \in A \cup B$, $0 \notin A \cap B$, 又因为 $a \neq 0$,

若 $\frac{b}{a} = 0$, 则 $b = 0$, $A = \{2, a, 0\}$, $B = \{1, 0, a\}$, 不合题意, 舍去;

若 $a + b = 0$, 则 $\frac{b}{a} = -1$, 可得 $A = \{2, a, -1\}$, $B = \{1, 0, b\}$,

则 $-1 \in A \cap B$, $1 \in A \cap B$, 所以 $a = 1$, $b = -1$.

综上, $a = 1$, $b = -1$.

(3) 【证明】设 $D = \{x \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$,

$(A \triangle B) \triangle C = D \triangle C = \{x \mid x \in D \cup C, x \notin D \cap C\} = \{x \mid x \in A \cup B \cup C, x \notin A \cap B \cap (\complement_{\mathbf{R}} C), x \notin A \cap C \cap (\complement_{\mathbf{R}} B), x \notin C \cap B \cap (\complement_{\mathbf{R}} A)\}$;

设 $E = \{x \mid x \in C \cup B, x \notin C \cap B\}$, $A \triangle (B \triangle C) = A \triangle E = \{x \mid x \in A \cup E, x \notin A \cap E\} = \{x \mid x \in A \cup B \cup C, x \notin A \cap B \cap (\complement_{\mathbf{R}} C), x \notin A \cap C \cap (\complement_{\mathbf{R}} B), x \notin C \cap B \cap (\complement_{\mathbf{R}} A)\}$.

所以 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

高手视角 根据新运算的定义, 将其转化为熟悉的集合的交集、并集、补集的运算.